

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 02 trang)

Bài 1. (2 điểm)

Cho hai số thực phân biệt a, b thỏa điều kiện $ab = a - b$.

Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$

Bài 2. (3 điểm)

Giải phương trình: $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x+2} = \frac{4x-3}{5}$

Bài 3. (3 điểm)

Cho 2 số x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$, đồng thời $x_1^2 - \frac{1}{2}$

và $x_2^2 - \frac{1}{2}$ cũng là các nghiệm của phương trình $x^2 + (a^2 - \frac{1}{2})x + b^2 - \frac{1}{2} = 0$. Tìm a và b .

Bài 4. (4 điểm)

a) Cho 2 số thực x, y ($x + y \neq 0$). Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + \left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2 \geq 2$

b) Trong mặt hình vuông có cạnh bằng 1, ta lấy 5 điểm tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại 2 điểm có khoảng cách không vượt quá $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Bài 5. (5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Một đường tròn (K) qua A tiếp xúc với cạnh BC tại D , cắt AB, AC lần lượt tại P, Q và cắt (O) tại E khác A . Tia ED cắt (O) tại F khác E . Chứng minh rằng:

a) $\widehat{CAD} = \widehat{FAB}$.

b) $\frac{PQ}{BC} = \frac{DP \cdot DQ}{DB \cdot DC}$

Còn tiếp trang sau

Bài 6. (3 điểm)

Chiều 13/3, Công ty khai thác thủy lợi hồ Dầu Tiếng - Phước Hòa cho biết đã kết thúc đợt xả nước đợt mún xuống sông Sài Gòn. Đây là lần xả nước thứ 5 từ đầu năm, giúp người dân Sài Gòn đảm bảo nước sinh hoạt, phục vụ nông nghiệp.

Đợt xả nước công suất 30 m³/s kéo dài trong 3 ngày, mún đã được đẩy ra các cửa sông. Theo đợt này, sau đợt xả, mực nước trong hồ cao khoảng 20 m, trữ lượng gần 850 triệu m³.

Tuy giúp các nhà máy nước hồ lưu hoạt động được nhưng nhiều chuyên gia bày tỏ lo ngại bởi trữ lượng tại các hồ đầu nguồn thấp trong khi đợt báo đợt hạn mún có thể kéo dài đến tháng 5. Hiện các hồ phải cần kéo trong việc xả nước đợt mún để phục vụ cho nông nghiệp và hoạt động sản xuất nước.

Vì nguyên nhân xâm nhập mặn, ông Phạm Thế Vinh - Viện Khoa học Thủy lợi miền Nam - cho rằng, hiện mún diễn ra mạnh vì El Nino kéo dài khiến khu vực Nam bộ rất ít mưa. Ngoài ra, việc trữ lượng kéo dài đến tháng 2, 3 khiến nước mún đi sâu vào các cửa sông. Ông Bùi Thanh Giang - Phó tổng giám đốc Công ty cấp nước Sài Gòn (Sawaco) - cho biết, năm nay trữ lượng nước về các hồ đầu nguồn giảm mạnh. Trong đó, lượng nước tích trữ cửa hạ thủy hồ Dầu Tiếng - Phước Hòa trên thủy năng nguồn sông Sài Gòn hiện chỉ đạt khoảng 70%. Lưu lượng cửa hạ Trại An trên sông Đông Nai chỉ đạt khoảng 80% so với trung bình hàng năm. Về giải pháp lâu dài, Sawaco kiến nghị UBND TP HCM cho phép xây dựng hồ trữ nước thô cho nguồn nước sông Sài Gòn với vốn thế hiện tại ngân sách. Ngoài ra, đợt về cũng đã xuất nâng cao công nghệ xử lý nước nhằm việc này để giảm chi phí đầu tư, vốn hành cao (*Người vnexpress.net*).

- Hãy cho biết lượng nước mà hồ Dầu Tiếng đã xả ra trong 3 ngày vừa qua?
- Nếu tiếp tục xả 20% lượng nước hiện có để ngăn mặn (với tốc độ xả như trên) thì công việc này sẽ mất khoảng bao nhiêu ngày.
- Giả sử việc xả nước chỉ ngừng mún diễn ra liên tục từ hôm nay (22/3) đến hết ngày 15/5, tính lượng nước mà hồ đã xả ra trong khoảng thời gian này.

HẾT

ĐÁP ÁN

Bài 1. (2 điểm)

Cho hai số thực phân biệt a, b thỏa điều kiện $ab = a - b$.

Tính giá trị của biểu thức $A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$

$$A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = \frac{a^2 + b^2 - a^2b^2}{ab} = \frac{(a-b)^2 + 2ab - a^2b^2}{ab} = 2 \quad (2đ)$$

Bài 2. (3 điểm) Giải phương trình : $\sqrt{5x-1} - \sqrt{x+2} = \frac{4x-3}{5}$

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{5}$

$$\sqrt{5x-1} - \sqrt{x+2} = \frac{4x-3}{5} \Leftrightarrow \frac{4x-3}{\sqrt{5x-1} + \sqrt{x+2}} = \frac{4x-3}{5} \quad (1đ)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ \sqrt{5x-1} + \sqrt{x+2} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ \sqrt{5x-1} - 3 + \sqrt{x+2} - 2 = 0 \end{cases} \quad (1đ)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ \frac{5(x-2)}{\sqrt{5x-1}+3} + \frac{x-2}{\sqrt{x+2}+2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ x = 2 \end{cases} \quad (1đ)$$

Bài 3. (3 điểm)

Cho 2 số x_1 và x_2 là các nghiệm của phương trình $x^2 + ax + b = 0$, đồng thời $x_1^2 - \frac{1}{2}$ và

$x_2^2 - \frac{1}{2}$ cũng là các nghiệm của phương trình $x^2 + (a^2 - \frac{1}{2})x + b^2 - \frac{1}{2} = 0$. Tìm a và b .

Theo định lý Viète ta có :

$$x_1 + x_2 = -a ; x_1x_2 = b ; \quad (0,5đ)$$

$$x_1^2 - \frac{1}{2} + x_2^2 - \frac{1}{2} = -a^2 + \frac{1}{2} ; (x_1^2 - \frac{1}{2})(x_2^2 - \frac{1}{2}) = b^2 - \frac{1}{2} \quad (0,5đ)$$

$$x_1^2 - \frac{1}{2} + x_2^2 - \frac{1}{2} = -a^2 + \frac{1}{2} \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = \frac{3}{2} - a^2 \quad (0,5đ)$$

$$\Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{3}{2} - a^2 \Rightarrow 2a^2 - 2b = \frac{3}{2} \quad (0,5đ)$$

$$(x_1^2 - \frac{1}{2})(x_2^2 - \frac{1}{2}) = b^2 - \frac{1}{2} \Rightarrow x_1^2x_2^2 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{4} = b^2 - \frac{1}{2} \quad (0,5đ)$$

$$\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow b = -\frac{3}{4} \quad (0,5đ)$$

Thỏa mãn điều kiện có nghiệm, ta nhận $a = 0, b = -\frac{3}{4}$

Bài 4. (4 điểm)

a) Cho 2 số thực x, y ($x + y \neq 0$). Chứng minh rằng: $x^2 + y^2 + \left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2 \geq 2$

$$x^2 + y^2 + \left(\frac{1+xy}{x+y}\right)^2 \geq 2 \Leftrightarrow (x+y)^2(x^2 + y^2) + (1+xy)^2 \geq 2(x+y)^2 \quad (0,5đ)$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^4 - 2xy(x+y)^2 + (1+xy)^2 - 2(x+y)^2 \geq 0 \quad (0,5đ)$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^4 - 2(x+y)^2(1+xy) + (1+xy)^2 \geq 0 \quad (0,5đ)$$

$$\Leftrightarrow [(x+y)^2 - (1+xy)]^2 \geq 0 \text{ (Đúng)} \quad (0,5đ)$$

Cách khác: Đặt $\frac{1+xy}{x+y} = -z \Rightarrow xy + yz + zx = -1$

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x+y+z)^2 - 2(xy + yz + zx) \geq 2 \Rightarrow \text{đpcm}$$

b) Trong mặt hình vuông có cạnh bằng 1, ta lấy 5 điểm tùy ý. Chứng minh rằng luôn tồn tại 2 điểm có khoảng cách không vượt quá $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ta chia hình vuông đã cho thành 4 hình vuông nhỏ có cạnh bằng $\frac{1}{2}$. (0,5đ)

Theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại 2 điểm cùng thuộc một hình vuông nhỏ nên khoảng cách giữa chúng không vượt quá đường chéo hình vuông này. (1đ)

Đường chéo hình vuông nhỏ là $\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \text{đpcm}$. (0,5đ)

Bài 5. (5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) . Một đường tròn (K) qua A tiếp xúc với cạnh BC tại D , cắt AB, AC lần lượt tại P, Q và cắt (O) tại E khác A . Tia ED cắt (O) tại F khác E . Chứng minh rằng:

a) $\widehat{CAD} = \widehat{FAB}$.

b) $\frac{PQ}{BC} = \frac{DP \cdot DQ}{DB \cdot DC}$

a) $\widehat{CAD} = \widehat{FAB}$

Ta có $\widehat{ACB} = \widehat{AFB}$ (cùng chắn cung AB) (0,5đ)

$\widehat{ADB} = \widehat{AED}$ (cùng chắn cung AD) (0,5đ)

$$\widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ADB} = 180^\circ - \widehat{AED} = \widehat{ABF} \quad (0,5đ)$$

Suy ra $\triangle ADC \sim \triangle ABF \Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{FAB}$ (0,5đ)

b) $\frac{PQ}{BC} = \frac{DP \cdot DQ}{DB \cdot DC}$

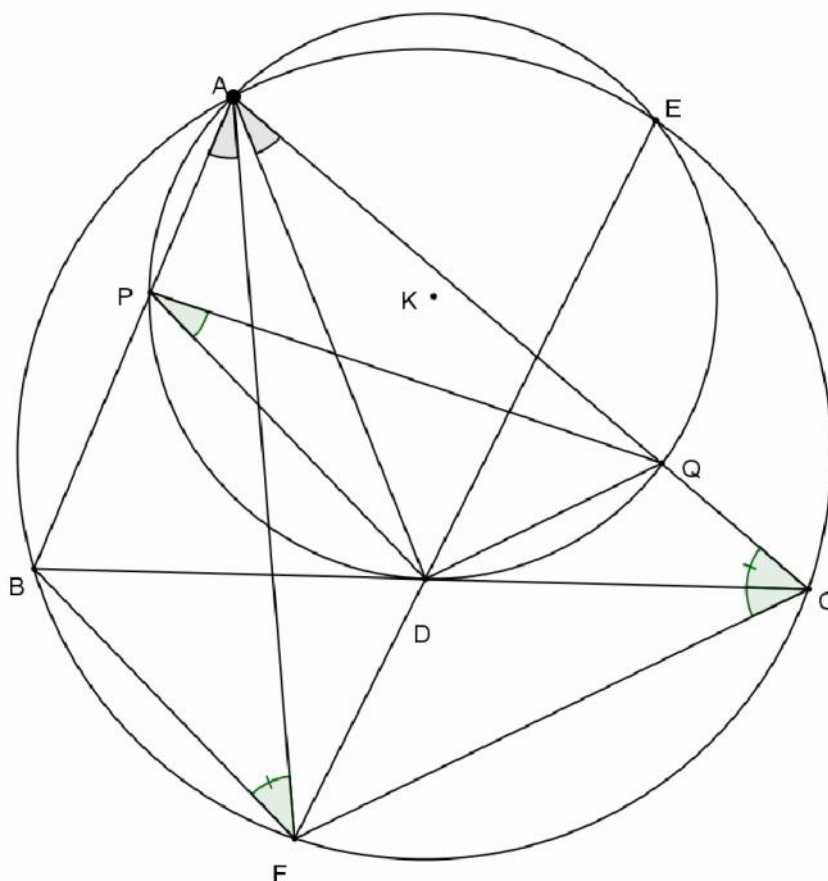
$$\triangle ADC \sim \triangle ABF \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{CD}{BF} \quad (0,5đ)$$

$$\Delta PDB \sim \Delta DAB \Rightarrow \frac{AD}{AB} = \frac{DP}{DB} \quad (0,5đ)$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{BF} = \frac{DP}{DB} \Rightarrow DB \cdot DC = DP \cdot BF \quad (0,5đ)$$

$$\Delta PDQ \sim \Delta CFB \Rightarrow \frac{PQ}{BC} = \frac{DQ}{FB} \Rightarrow FB = \frac{DQ \cdot BC}{PQ} \quad (0,5đ)$$

$$\Rightarrow DB \cdot DC = DP \cdot \frac{DQ \cdot BC}{PQ} \Rightarrow \frac{PQ}{BC} = \frac{DP \cdot DQ}{DB \cdot DC} \quad (1đ)$$



Bài 6. (3 điểm)

a/ Lượng nước xả ra trong 1 ngày: $24.3600.30 = 2\,592\,000 \text{ m}^3$ (0,5đ)

Lượng nước xả ra trong 3 ngày: $2\,592\,000 \cdot 3 = 7\,776\,000 \text{ m}^3$ (0,5đ)

b/ 20% lượng nước hiện có: $850 \text{ triệu m}^3 \cdot 20\% = 170 \text{ triệu m}^3$ (0,5đ)

Số ngày dùng đủ xả lượng nước trên: $170 \cdot 10^6 : 2\,592\,000 \approx 65,5 \text{ ngày}$ (0,5đ)

c/ Từ 22/3 đến hết 15/5 có 55 ngày (0,5đ)

Lượng nước xả ra là: $55 \cdot 2\,592\,000 = 142\,560\,000 \text{ m}^3$ (0,5đ)